Else Starkenburg

Recensie van:
Simon Singh: “Het laatste raadsel van Fermat”
Fourth Estate, London, 1997, 367 p.

Een drie eeuwen durende speurtocht naar een absoluut bewijs

In “Het laatste raadsel van Fermat” beschrijft Singh de zoektocht naar het bewijs voor de stelling van Fermat. Deze zoektocht zou uiteindelijk meer dan drie eeuwen duren.
In het boek wordt kennis gemaakt met veel wiskundige principes en ontdekkingen en Singh vertelt over de levens en werkwijze van de beroemdste wiskundigen. Hoewel dit op zich al meer dan genoeg interessante stof oplevert is het boek toch meer dan slechts een weergave van drie eeuwen wiskundegeschiedenis. In zijn vertelling raakt Singh wel degelijk aan enkele wetenschapsfilosofische fundamenten. In hoeverre is de wiskunde nog een wetenschap van absolute waarheden te noemen?

Het boek van Simon Singh sluit aan in een lange rij van generalistische literatuur die geschreven wordt voor het grote publiek. Verschil met dit boek is wel dat Singh zelf geen wetenschapper is, maar een journalist. Hij kwam via het maken van een documentaire in contact met Andrew Wiles, die het raadsel uiteindelijk zou oplossen, en dit inspireerde hem om een boek te gaan schrijven over het raadsel dat deze man zo bezig hield. Dat Singh zelf geen wiskundige is, levert een frisse, soms verhelderend simpele kijk op de wiskunde op.
Het boek beschrijft de wereldberoemde stelling die zijn wortels heeft in het oude Griekenland en raakt aan bijna alle onderwerpen die de wiskunde sindsdien behandeld heeft. We leren niet alleen de wiskundige vraagstukken kennen die zich rond de stelling bevinden, maar ook het leven van de wiskundigen zelf die zich door de eeuwen heen gefascineerd voelen door dit bijzondere raadsel.
Ook hier distantieert Singh zich van de meer gangbare generalistische literatuur. Zijn uitgebreide beschrijvingen van de mensen die een rol in het verhaal spelen, wisselen de wiskundige onderwerpen af en maken het boek ook heel leesbaar voor degenen die niet heel veel van het wiskundige deel afweten. Hoewel de stelling door de meeste middelbare scholieren begrepen kan worden, is het toch een van de grootste struikelblokken van de wiskunde geweest en heeft men er meer dat drie eeuwen over gedaan om een sluitend bewijs te kunnen formuleren.

In zijn algemene vorm ziet de stelling er als volgt uit:
$x^n + y^n = z^n$ heeft geen oplossingen in de gehele getallen voor n groter dan twee.

Zoals vaker bij wiskundige problemen is niet zo zeer het bewijzen van de stelling het meest interessante aspect, maar juist de wiskunde die erom heen ontwikkeld wordt. Dit levert dan ook een driehonderd bladzijden lange speurtocht op, waarbij alles wat onderweg tegen wordt gekomen interessanter is dan het doel van de speurtocht zelf.

Singh beschrijft de geschiedenis van deze stelling grotendeels chronologisch. In de eerste hoofdstukken behandelt hij het begin van de wiskunde ten tijde van Pythagoras. Hij vertelt dan globaal wat over de ontwikkeling van de wiskunde in de eeuwen die daarop volgen om vervolgens een sprong te maken naar de 17^e eeuw; de eeuw waarin Fermat leefde. De daaropvolgende hoofdstukken behandelen de pogingen die vele wiskundigen uit de 18^e en 19^e eeuw hebben ondernemen om het raadsel op te lossen. Hoofdrolspeler in het boek is de man die het raadsel uiteindelijk zal oplossen: Andrew Wiles. Er zijn dan ook twee hoofdstukken geheel aan zijn werk en werkwijze gewijd. Ook tussen de hoofdstukken door komt Singh altijd weer even op Wiles en zijn passie voor de stelling terug. Wiles wordt als tienjarige al door de stelling gefascineerd, met het kleine beetje wiskunde dat hij toen kende, was het probleem al voor hem te begrijpen en toch kwamen alle groten der aarde er niet uit. Dit leidt tot een zodanige fascinatie van Wiles voor deze stelling dat hij later, als gevestigd wiskundige, zijn carrière en sociale contacten ervoor op zal geven om zich alleen nog maar aan dit probleem te wijden.

Singh besluit, in het laatste hoofdstuk van het boek, met een kort overzicht van de hedendaagse wiskunde en de problemen die daar in opduiken. Voor de meer wiskundig geïnteresseerde lezer is bovendien een uitgebreide bijlage toegevoegd met een aantal bewijzen erin.
In mijn recensie zal ik ruwweg dezelfde indeling aanhouden. Ik zal eerst de hoofdlijnen van het boek bespreken om me daarna meer te richten op de wetenschapsfilosofische aspecten ervan en mijn commentaar daarop.

Van de oude Grieken tot de geboorte van een raadsel

Pythagoras
Singh begint zijn tocht door de geschiedenis van de wiskunde bij de oude Grieken.
Pythagoras was een van de eerste wetenschappers die ontdekte dat getallen ten grondslag liggen aan veel alledaagse dingen, de muziek bijvoorbeeld. Ook wordt hij wel gezien als de “uitvinder” van het wiskundig bewijs. Hij liet niet alleen zien dat zijn stelling over de verhoudingen van rechthoekige driehoekszijden klopte voor veel driehoeken die je je voor kan stellen, maar ook dat deze eigenschap geldt voor alle denkbare rechthoekige driehoeken. Deze beroemde stelling, die bijna elke wiskundige scholier kent luidt: $x^2 + y^2 = z^2$. In een iets veranderde vorm staat hier echter: $x^n + y^n = z^n$ waarbij n alle gehele getallen kan aannemen. De Pythagoreërs waren de eerste die opmerkten dat als je n niet 2 maar hoger koos, het heel moeilijk was er een oplossing in de gehele getallen voor te vinden. Het lukte zelfs helemaal niet. Dit is het begin van wat de laatste stelling van Fermat zou gaan heten.
Wiskundige bewijzen als dat van de stelling van Pythagoras berusten op een logisch proces, waarin ze worden afgeleid van absolute waarheden die we axioma’s noemen. Zijn ze eenmaal bewezen dan zijn de stellingen geldig tot het einde der tijden. Door het grote verschil van deze absolute waarheid met de dingen die je over de natuur kunt zeggen wordt dit wel gezien als het begin van de afscheiding van de wiskunde van de natuurwetenschappen.
Dit nieuwe begrip van wiskundig bewijs verspreidde zich snel en de wiskunde beleefde een bloeiperiode ongeveer twee eeuwen na Pythagoras’dood ten tijde van de bibliotheek van Alexandrië.

Pierre de Fermat
Singh maakt op dit punt een sprong naar omstreeks 1600 en een van de hoofdrolspelers in het boek; Pierre de Fermat. Voor Fermat is de wiskunde niet veel meer dan een hobby waar hij de avonduren mee vult. Hij weet echter wel een behoorlijk aantal stellingen te bewijzen en houdt zich onder andere bezig met de waarschijnlijkheidsrekening en de infinitesimaalrekening die Newton later zou vervolmaken. Een opmerkelijke eigenschap van Fermat is dat hij geen belang stelt in publicatie en dit gebruikt om zijn medewiskundigen te sarren. Meer dan eens schrijft hij naar een collega een brief met de mededeling dat hij een ingewikkeld probleem heeft opgelost en stelt de ander voor de uitdaging hetzelfde te doen. Pas als de ander zijn nederlaag heeft erkend, maakt Fermat zijn bewijs bekend wat inderdaad altijd blijkt te kloppen. Zo komt het ook dat van wat zijn beroemdste stelling zou worden niets dan een kanttekening overblijft. In een boek waarin de beroemde stelling stond beschreven die nu zijn uiteindelijke vorm had aangenomen, schreef Fermat in de kantlijn:

Ik heb een waarlijk spectaculair bewijs voor deze stelling gevonden, maar deze marge is te smal om het te bevatten.

Een raadsel was geboren.

Drie eeuwen puzzelen

Na de dood van Fermat restte de rest van de wiskundige wereld de uitdaging om dit raadsel op te lossen en het (eventuele) bewijs van Fermat te reconstrueren. Singh beschrijft nauwkeurig de levens van enkele wiskundigen die dit ook daadwerkelijk proberen. Velen van hen zullen hier niet veel verder mee komen, het probleem bleek aanzienlijk moeilijker dan gedacht en het uitpluizen van de aantekeningen van Fermat zelf levert niets dan een paar hints op voor de oplossing voor het geval n=4. Er zijn echter een paar grote wiskundigen die een kleine voortgang weten te bereiken.

Leonhard Euler
Zodoende komt Singh bij de grote 18e eeuwse wiskundige Leonhard Euler. Euler produceert een verbazingwekkende hoeveelheid aan nieuwe wiskunde, maar weet in de laatste stelling van Fermat maar een klein bresje te slaan; hij bewijst de stelling voor het geval n=3. Omdat dit een priemgetal is, is dit een grotere vooruitgang dan op het eerste gezicht lijkt, alle getallen zijn namelijk te schrijven als een combinatie van priemgetallen. Dit betekent dat als de stelling bewezen zou kunnen worden voor alle priemgetallen, zij ook voor de rest van de getallen bewezen zou worden. Helaas is het aantal priemgetallen ook nog oneindig.

Sophie Germain
Dan blijft het heel lang stil rond de stelling totdat de volgende doorbraak wordt gedaan door een jonge Française, Sophie Germain. In haar tijd, eind achttiende eeuw, was het niet gepast voor vrouwen om zich met wetenschap bezig te houden en om haar onderzoek te kunnen doen ontzegt zij zichzelf een sociaal leven en doet de meeste van haar ontdekkingen onder een pseudoniem: monsieur Le Blanc. Zij ontdekte een specifieke reeks priemgetallen waarvan ze bewees dat het niet waarschijnlijk was dat de stelling van Fermat een oplossing in deze orde had. Met behulp van haar werk wisten Dirichlet, Legendre en Lamé de stelling voor n=5 en n=7 te bewijzen.
Mede door deze gebeurtenissen wordt de belangstelling van wiskundigen voor de stelling weer aangewakkerd; er wordt bovendien een prijsvraag uitgeschreven voor degene die het dichtst bij een bewijs voor de stelling weet te komen. Dit levert een hoop interessante wiskunde op, vooral als Cauchy en Lamé beide beweren dat ze heel dicht bij een bewijs van de stelling zitten. De prijs gaat echter uiteindelijk naar Ernst Kummer die aantoont waar de beide heren in de fout gaan. Wiskundige na wiskundige lijkt op dit kritieke punt te stranden en velen geven de hoop op een uiteindelijk bewijs op.

Het Hilbert-programma
Weer wordt er een prijsvraag uitgeschreven, ditmaal voor degene die de stelling uiteindelijk zal oplossen. Hoewel hier veel reacties op komen, lijken de groten het raadsel toch een beetje opgegeven te hebben. In plaats van zich te richten op de uiteindelijke oplossing van het raadsel gaat een groepje wiskundigen aan de slag met een meer fundamenteel probleem. Hoewel wiskundigen zich al honderden jaren op bepaalde stellingen fundeerden, zat het de wiskundige gemeenschap toch dwars dat een aantal van deze stellingen nooit echt behoorlijk bewezen waren. Ze leken voor een heleboel gevallen wel op te gaan en werden daarom als triviaal beschouwd, maar echt bewezen waren ze nog nooit. De bedoeling was om alle bestaande stellingen terug te leiden op een aantal die zo fundamenteel zijn dat ze niet te bewijzen waren. Deze stellingen heten axioma's en ze zijn als het ware de bouwstenen van de wiskunde. Het gevaar bestond echter dat naast de axioma's een aantal stellingen bestond dat nooit bewezen was en dus fouten kon bevatten. Mocht dit zo blijken te zijn dan zou alles wat vervolgens weer op deze foute stellingen was gebaseerd ook niet meer kloppen en dit zou een ramp voor de wiskunde kunnen betekenen. Men hoopte door het aanpakken van deze fundamentele problemen tot nieuwe inzichten te komen.
Het programma werd geleid door David Hilbert, een zeer vooraanstaande wiskundige. Hij wilde laten zien dat wiskunde, theoretisch gezien dan, in staat zou zijn elke vraag te beantwoorden en bovendien dat de wiskunde vrij zou zijn van logische inconsistenties.
Een van de wiskundigen die een grote bijdrage in dit programma leverde was Gottlob Frege. Hij probeerde te laten zien wat getallen eigenlijk waren, zo definieerde hij bijvoorbeeld het getal drie door een verzameling te maken die hij “drieheid” noemde en die alle dingen bevatte waar er drie van waren. Hij maakte gebruik van de verzamelingenleer om dingen te definiëren die tot dan toe ongedefinieerd gewoon waren aangenomen. Helaas voor hem kwam vlak voor het verschijnen van zijn werk Bertrand Russell met een probleem wat het fundament van zijn boek betrof. De beroemde paradox van Russell was natuurlijk net zoals het werk van Frege in wiskundetaal opgesteld, maar de paradox wordt vaak verhelderd met behulp van de volgende analogie:

Een bibliothecaris ontdekt op een dag een verzameling catalogi. Het valt hem op dat sommige in zichzelf vermeld worden, terwijl andere dit niet doen. Dit inspireert hem tot het opzetten van een nieuwe indeling, hij maakt twee nieuwe catalogi waarvan de ene alle catalogi vermeldt die in zichzelf *vermeld worden, terwijl de andere alle catalogi vermeldt die niet in zichzelf vermeld worden. Deze laatste catalogus bevat het probleem: moet deze catalogus in zichzelf vermeld worden? Als hij niet wordt vermeld dan zou hij wel vermeld moeten worden, maar als hij wel vermeld wordt zou hij niet vermeld mogen worden.*

We zijn hier dus gestuit op een logische inconsistentie en het vervelende voor Frege was dat deze inconsistentie ook zijn verzamelingenleer aantastte. Russell betwijfelde niet alleen de verzamelingenleer van Frege, volgens hem zouden zelfs de axioma's tot ongerijmdheden kunnen leiden. Veel intellectuelen twijfelden aan het werk van Russell en beweerden dat de wiskunde wel degelijk een glashelder vakgebied was. Russell zelf hoopte de "fout" die hij had gevonden nog te kunnen herstellen en gaat zich toeleggen op het werken met en onderzoeken van axioma's.
Enkele tientallen jaren later publiceert echter een andere wiskundige, Kurt Gödel, een artikel dat deze hoop tenietdoet. Gödel bewijst omstreeks 1930 zijn twee stellingen van onbeslisbaarheid:

- Als de axiomatische verzamelingenleer consistent is, bestaan er stellingen die noch bewezen noch weerlegd kunnen worden
- Er is geen constructieve methode die bewijst dat de axiomatische theorie consistent is

Een meer populaire uitleg van zijn eerste stelling luidt de paradox: "Deze stelling heeft geen bewijs". Het is goed in te zien dat deze stelling hoe dan ook niet bewezen kan worden. Immers, als er een bewijs zou worden geleverd, zou de stelling gelijk niet meer kloppen. De theorie van Gödel werd in de jaren zestig bevestigd door de jonge wiskundige Paul Cohen, die inderdaad een aantal onbeslisbare vragen binnen de wiskunde wist te vinden.
Dit had natuurlijk grote gevolgen voor de wiskunde in het algemeen, maar ook zeker voor alle wiskundigen die bezig waren grote stellingen te bewijzen; wat als bijvoorbeeld de laatste stelling van Fermat een dergelijke onbeslisbare vraag bleek te zijn?

De wiskunde en de computer
Singh veroorlooft zich op dit kritieke punt een uitstapje naar een ander gebied waarin de wiskunde een grote sprong maakte, namelijk de computer. In het opkomende computertijdperk is het voor het eerst dat de getaltheorie een toegepaste rol gaat spelen. Dit gebeurt vooral in de Tweede Wereldoorlog, waar topwiskundigen werden ingezet om samen met hun computers de codes van de tegenstander te kraken. Deze rol is zeker niet te verwaarlozen, door het toedoen van mensen als Turing en de Enigma machine wisten de geallieerden vaak Duitse codes te kraken en aanvallen te onderscheppen. De Duitsers waren er zo van overtuigd dat hun code deugde dat ze de mislukkingen eerder op overlopers schoven dan op hun code en ze veranderden deze dus ook niet.
Na de Tweede Wereldoorlog speelt de computer een steeds grotere rol binnen de wiskunde. Ook wordt hij gebruikt om steeds meer gevallen van de stelling van Fermat uit te rekenen. Er zijn echter nog oneindig gevallen te gaan en het is daarom ondenkbaar dat een computer in dit geval ook de stelling zou kunnen bewijzen, hij zou hier een oneindige tijd over doen. Wel maken de computerberekeningen meer en meer aannemelijk dat de stelling wel klopt.

Andrew Wiles en zijn zoektocht naar het bewijs

We keren nu weer terug naar Andrew Wiles en zijn pogingen om de laatste stelling van Fermat te bewijzen.

Modulaire vormen en elliptische krommen
Singh begint hier met het uitleggen van een aantal gebieden in de wiskunde die Wiles uiteindelijk zullen leiden naar de oplossing voor zijn probleem; de elliptische krommen en de modulaire vormen. We zullen eerst even kort kijken naar de elliptische krommen, oftewel elliptische vergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, waarbij a, b en c gehele getallen zijn. Het is over het algemeen heel moeilijk om zo'n vergelijking op te lossen. Daarom maken de wiskundigen gebruik van zogenaamde klokrekenkunde. Net als bij een gewone klok lopen de getallen niet tot oneindig door maar beginnen na een tijdje weer overnieuw. In de 5-kloksrekenkunde is 2+6

bijvoorbeeld 3. Na vijf begin je immers opnieuw met tellen. In de klokrekenkunde zijn wél alle oplossingen voor een bepaalde elliptische kromme te vinden. De wiskundigen besloten toen een soort tabel te maken met hoeveel oplossingen een bepaalde elliptische kromme had in verschillende klokrekenkundes. Zij hoopten dat ze, door goed naar deze tabel te kijken de volgende getallen in de lijst zouden kunnen voorspellen. De tabel noemen ze een E-reeks. Een E-reeks voor een bepaalde elliptische kromme ziet er bijvoorbeeld als volgt uit:

$E_1 = 1$

$E_2 = 4$

$E_3 = 4$

$E_4 = 8$

…

Dit betekent dus dat deze elliptische kromme 1 oplossing heeft in de 1-kloksrekenkunde, 4 in de 2-kloksrekenkunde, enzovoort.

Modulaire vormen behoren tot een geheel andere tak van de wiskunde. Met een modulaire vorm wordt een vorm bedoeld die extreem symmetrisch is. Hij kan op een oneindig aantal manieren worden gekanteld, gedraaid en verschoven en toch telkens hetzelfde blijven. Helaas is het onmogelijk om een modulaire vorm te tekenen, hij is vierdimensionaal en daarom voor ons heel moeilijk voor te stellen. Een modulaire vorm is als het ware opgebouwd uit een aantal basisingrediënten. Je kunt hem daarom beschrijven door gewoon aan te geven hoeveel je van een bepaald ingrediënt nodig hebt. Op deze manier krijg je een soort zelfde reeks als we net voor de elliptische krommen kregen, deze wordt door wiskundigen wel de M-reeks genoemd.

De Taniyama-Shimura hypothese en weer de laatste stelling van Fermat

Singh behandelt naast deze wiskundige concepten ook de levens en wiskundige ambities van twee Japanse wiskundestudenten, Yutaka Taniyama en Goro Shimura. Zij kwamen met de hypothese dat er voor elke reeks elliptische krommen ook een reeks modulaire vormen zou moeten bestaan. Dit was een gewaagde maar ook verstrekkende hypothese, want als zo'n verband aangetoond zou worden zou dat betekenen dat vragen uit de ene discipline in de andere opgelost kunnen worden.

De link met de laatste stelling van Fermat wordt gelegd als Gerhard Frey een bizarre elliptische vergelijking vindt die volgt uit de oplossing van de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ voor n groter dan 2. Zou deze elliptische kromme dus bestaan dan zou een tegenvoorbeeld voor de stelling van Fermat zijn gevonden. Een andere wiskundige, Ken Ribet, weet aan te tonen dat deze elliptische vergelijking zo bizar is dat er geen modulaire vorm van kan bestaan. Als dus bewezen kan worden dat elke elliptische vergelijking een bijbehorende modulaire vorm heeft, wat de hypothese van Taniyama-Shimura beweert, is dit gelijk een bewijs dat de elliptische vergelijking van Frey niet bestaat. Dit is dan weer een bewijs dat de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ voor n is groter dan 2 geen oplossingen heeft en dus het bewijs voor de stelling van Fermat.

Wiles en het uiteindelijke bewijs

Andrew Wiles gaat zich dus toeleggen op het bestuderen van elliptische krommen en modulaire vormen in plaats van zich op de pure getallentheorie te richten. Om zich rustig en ongestoord aan deze studie te kunnen wijden, ontzegt Wiles zich elk contact met zijn medewiskundigen en trekt zich terug op zijn zolderkamer om zich in alle rust op het probleem te kunnen concentreren. Hij stuit in zijn zoektocht op het werk van een negentiende eeuwse wiskundige, Évariste Galois, die een zogenoemde groepentheorie ontwikkeld had. Wiles ziet dat hij dit ook kan toepassen om zijn krommen en vormen te groeperen en dan hoeft hij nog maar per groep te bewijzen dat ze aan elkaar gelinkt zijn. Na lang zwoegen lukt het hem om dit voor de eerste groep te bewijzen, hij moet nu nog een mechanisme zien te vinden dat ervoor zorgt dat het bewijs ook voor de, nog steeds oneindig aantal, andere groepen werkt. Wiles bereikt tijdens zijn onderzoek vele schitterende deelresultaten, maar houdt deze zorgvuldig geheim, omdat hij eerst het hele bewijs wil voltooien.

Na zes jaar afzondering is hij zover dat hij denkt de laatste stukjes van de puzzel ook opgelost te hebben. Hij neemt nu een collega in vertrouwen om zijn bewijs te checken. Dit gebeurt op een erg ingenieuze manier. Omdat het onmogelijk is even in een middagje het bewijs uit te leggen besluit Wiles om een collegereeks voor promovendi te geven, getiteld "Berekeningen op elliptische krommen". Deze titel was zo vaag dat het werkelijk overal over had kunnen gaan. Het idee is echter

dat Wiles in deze colleges zijn bewijs zou uitleggen aan zijn vertrouweling, Nick Katz. Er komen in het begin nog wel wat promovendi op de colleges af, maar de stof is zo droog en lijkt zo nergens toe te leiden dat zij al snel afhaken en Wiles rustig aan Katz zijn bewijs kan voorleggen.
Wiles besluit vervolgens zijn bewijs in 1993 in Cambridge in een reeks lezingen openbaar te maken. Na deze lezing moet het bewijs nog gecheckt worden op juistheid, dit gebeurt door een aantal zogenoemde referenten. Helaas vindt een van hen een cruciale fout. Wiles probeert deze fout wel weer te herstellen, maar dit duurt langer dan hij oorspronkelijk dacht. Ondertussen oefent de rest van de wiskundige wereld een enorme druk op hem uit om zijn hele bewijs vrij te geven voor het publiek. Wiles is echter veel te bang dat iemand anders er met zijn bewijs vandoor gaat en zondert zich weer af. Na ongeveer een jaar weer non-stop met het probleem bezig te zijn geweest, weet hij eindelijk het probleem te verhelpen en publiceert hij zijn uiteindelijke bewijs.

De stelling van Fermat is na 358 jaar eindelijk bewezen!

Tot slot

Het Langlands-programma
Singh besluit in het laatste hoofdstuk van zijn boek met een overzicht van de wiskunde na de stelling van Fermat. Hoewel de oplossing van het raadsel natuurlijk een grote triomf is voor de wiskunde, zijn veel wiskundigen nog het meeste opgetogen over de wiskunde die Wiles gebruikt en ontwikkeld heeft om het raadsel op te lossen. De wiskundige Ken Ribet zegt hierover*: "Als je op een onbewoond eiland zou belanden, en je had allen maar dit manuscript, dan had je al stof genoeg om over na te denken. Je slaat een bladzij op en er is een kort optreden van een of andere fundamentele stelling van Deligne, en je slaat een andere op en ergens terloops zie je een stelling van Hellegouarch - al die dingen worden ter berge gebracht en gebruikt, voordat wordt overgestapt op het volgende idee."*[1]
Bovendien heeft Wiles door het bewijzen van de hypothese van Taniyama-Shimura ook twee deelgebieden van de wiskunde aan elkaar weten te knopen die voorheen niets met elkaar te maken hadden. Dit is erg belangrijk, omdat nu vraagstukken in het ene gebied opgelost kunnen worden met al bestaande kennis uit het andere gebied. Het is een ultieme droom voor veel wiskundigen om op deze manier alle afzonderlijke vakgebieden binnen de wiskunde aan elkaar te knopen en met een bepaald probleem over een landschap van vakgebieden te kunnen schuiven. Dit streven wordt het Langlands programma genoemd, naar idee van Robert Langlands. Andrew Wiles heeft met het bewijzen van Taniyama-Shimura de eerste belangrijke stap in dit programma gezet.

Overgebleven raadsels
Gelukkig zijn er ook nog genoeg wiskundige raadsels overgebleven. Singh noemt hier onder andere het vermoeden van Goldbach, dat stelt dat een even getal altijd de som is van twee priemgetallen en het vermoeden van Kepler over hoe bollen het beste gestapeld kunnen worden. Ook komt Singh nog even terug op de rol van de computer binnen de wiskunde, naar aanleiding van het vierkleurenprobleem. Dit probleem stelt dat elke denkbare kaart zo ingekleurd kan worden dat geen van de aanliggende landen dezelfde kleur hebben door slechts vier kleuren te gebruiken. Dit probleem is door wiskundigen teruggebracht tot een eindig aantal standaardkaarten, die vervolgens met de computer gecheckt zijn of ze met vier kleuren in te kleuren zijn. Dit heeft geleid tot een grote discussie over computergebruik, veel wiskundigen vinden het storend dat niet na te gaan is wat de computer precies gedaan heeft.
Misschien wel het vreemdste raadsel dat na Wiles' bewijs overeind blijft staan is de stelling van Fermat zelf! Het is namelijk ondenkbaar dat Fermat zelf de stelling bewezen zou hebben met behulp van modulaire vormen en elliptische krommen, deze behoren duidelijk tot de wiskunde van de 20e eeuw. Volgens sommige wiskundigen moet er dus nog een andere oplossing voor het probleem bestaan, geheel gebaseerd op wiskunde uit de 17e eeuw.

---

[1] Het laatste raadsel van Fermat, Simon Singh, vertaald door Mea Flothuis, oorspr. uitgave Fermat's last theorem, Fourth Estate, London 1997, pagina 308

Commentaar

Algemeen commentaar

Simon Singh geeft op een zeer fascinerende manier een groot deel van de geschiedenis van de wiskunde weer en weet dat zo te brengen dat het ook voor niet-wiskundigen heel goed te lezen is. Het boek is denk ik als generalistisch werk erg goed, omdat het, aan de ene kant er erg in slaagt om mensen te interesseren voor de meest fascinerende problemen binnen de wiskunde, maar aan de andere kant ook wat meer wetenschapsfilosofische inzichten geeft in het vakgebied zelf.
Dat Singh zelf geen wiskundige is, is jammer, omdat er daarom geen expliciete mening uit het boek spreekt. Singh doet wel verslag van verschillende problemen en discussies die zich in het domein van de wiskunde afspelen, maar laat niet merken daar zelf een mening over te hebben.
Aan de andere kant is deze neutraliteit juist erg voordelig, omdat je zo als lezer het idee krijgt goede, betrouwbare informatie te krijgen. Ook doet Singh er naar mijn mening zijn voordeel mee als hij de levens- en werkomstandigheden van de wiskundigen zelf bespreekt. Als buitenstaander weet hij een ongekleurde en nauwkeurige beschrijving te geven van wat deze mensen bezielt en hoe ze werken. Uit zijn beschrijving spreekt aan de ene kant een bewondering voor deze mensen die zich zo voor hun vakgebied inzetten, aan de andere kant ook een grote verwondering voor de manier waarop ze werken en de dingen die ze zichzelf daarvoor ontzeggen. Singh laat in de loop van zijn boek erg duidelijk zien dat wiskunde bedrijven wel degelijk mensenwerk is. Het klassieke idee van de wiskundige die zich puur en alleen met zijn problemen bezighoudt en leeft voor de wiskunde wordt flink tegengesproken. In het werkelijke wiskundige bedrijf blijken gevoelens als ijdelheid en competitiedrang, maar ook dingen als liefde, haat en discriminatie een zeer grote rol te spelen. Een goed voorbeeld hiervan is Fermat die door ijdelheid of onverschilligheid ervan werd weerhouden zijn bewijzen netjes op te schrijven. Maar denk ook aan de onderkenning van het werk van Sophie Germain of de neiging van Wiles om met niemand over het probleem te communiceren, uit angst dat iemand eerder de crux van het probleem ontdekt dan hij. Ook zie je hoezeer de wiskundige gemeenschap zelf zich in grote mate bezighoudt met het in de gaten houden van collega's. Singh laat dit op een, naar mijn mening, heel originele manier zien door wat mailtjes af te drukken die door wiskundigen heen en weer worden gestuurd met roddels wie waar nou weer mee bezig is.
Het beeld dat Singh op deze manier van de wiskundige gemeenschap schept kan best een openbaring zijn voor mensen die niet met deze tak van wetenschap vertrouwd zijn. Bovendien geeft het een vollediger beeld van de manier waarop de wiskunde zich door de eeuwen heen heeft ontwikkeld. Zonder deze persoonlijke informatie die Singh bij geen enkel besproken onderwerp achterwege laat zou het boek niet alleen heel wat saaier zijn om te lezen, het zou ook wetenschappelijk gezien een stuk minder interessant zijn.

Wiskunde en de absolute waarheid

Singh weet behalve een goede weergave van de levens van wiskundigen ook op een heel verhelderende en toch luchtige manier de wiskundige onderwerpen zelf aan te snijden. Behalve dat hij het voor niet-wiskundigen ook heel begrijpbaar weet te maken, weet hij ook heel goed de interessantste stukjes wiskunde eruit te halen.
Ik wilde hier met name nog even aandacht besteden aan de aparte positie die de zuivere wiskunde, zoals de getaltheorie, binnen de wetenschappen inneemt. Niet alleen zijn zij de enige wetenschappers die zich over het algemeen niet richten om de wereld om hen heen, maar juist op het abstracte, ook nemen zij binnen de waarheidsbepaling van de wetenschap een aparte plaats in. Sinds de besproken stelling van Pythagoras kent de wiskunde iets waar de andere natuurwetenschappen jaloers op mogen zijn: absoluut bewijs. Binnen de wiskunde is het mogelijk iets te bewijzen voor een oneindig aantal gevallen. De wiskunde heeft zodoende heel lang de status gehad een zuivere wetenschap te zijn die op die manier dicht bij de absolute waarheid opereerde.
Met het werk van Russell en vooral natuurlijk de onbeslisbaarheidsstellingen van Gödel is hier min of meer een einde aan gekomen. De wiskunde heeft zijn claim op de absolute waarheid moeten afleggen en moeten erkennen dat ook zij niet alle vragen kunnen beantwoorden. Vooral de tweede stelling van Gödel levert hier problemen op; het is niet te bewijzen dat de wiskunde het bij het rechte eind heeft.

De grote getallentheoreticus André Weil heeft ooit gezegd: *"God bestaat, want de wiskunde is consistent, en de duivel bestaat ook, want we kunnen het niet bewijzen."*[2]
Hoewel Singh een goede weergave geeft van de veranderingen en vooral de geschoktheid die dit binnen de wiskunde teweegbrengt, had hij er wat mij betreft nog wel wat meer aandacht aan mogen besteden. De stap die de wiskunde gedwongen is hiermee te maken, van absolute waarheid naar feilbaarheid is denk ik zeker niet triviaal en hoewel er een heel hoofdstuk aan gewijd wordt, mis ik dit onderwerp toch wel een beetje in het vervolg van het boek. Het belang van dit onderwerp wordt naar mijn mening nog het beste weergegeven door een citaat wat Singh opneemt van Bertrand Russell:

"Ik zocht zekerheid zoals andere mensen die zoeken in het geloof. Ik dacht dat zekerheid eerder te vinden zou zijn in de wiskunde dan elders. Maar ik kwam tot de ontdekking dat veel wiskundige bewijzen die mijn leraren verwachtten dat ik zou aanvaarden, wemelden van de drogredenen, en dat die zekerheid, mocht zij al te vinden zijn in de wiskunde, zou worden gevonden op een nieuw terrein van de wiskunde, met deugdelijker funderingen dan tot nu toe veilig werd geacht. Maar naarmate het werk vorderde, moest ik denken aan de fabel over de olifant en de schildpad. Nadat ik een olifant had geconstrueerd waarop de mathematische wereld kon rusten, zag ik de olifant wankelen, en begon ik een schildpad te construeren om de olifant te behoeden voor omvallen. Maar de schildpad bood niet meer stevigheid dan de olifant, en na een jaar of twintig hard ploeteren kwam ik tot de conclusie dat er niets meer was dat ik kon doen om mathematische kennis onbetwijfelbaar te maken."[3]

Wat duidelijk uit dit citaat en ook uit de verdere bespreking van Singh naar voren komt is dat de wiskunde voor veel van haar beoefenaars zodanig een soort religie is geworden, dat het voor hen heel lastig te accepteren is dat ook de wiskunde geen absolute waarheid biedt. Het idee wat ik uit het boek krijg is dat veel wiskundigen het feit ook naast zich neerleggen en gewoon verder gaan met waar ze gebleven waren. Aan de ene kant is dat natuurlijk ook niet zo verwonderlijk, de wiskunde heeft zulke talrijke successen geboekt dat het belachelijk zou zijn er zomaar mee op te houden of je door Gödels stellingen ervan te laten weerhouden wiskundig onderzoek te gaan doen.
Aan de andere kant lijkt me datgene wat in die stellingen bewezen wordt zo cruciaal dat het me verbaast dat er niet nog veel vervolg discussie en onderzoek naar gedaan wordt. Zoals eerder gezegd is dit ook wat er naar mijn mening in het boek mist. Het probleem zelf wordt uitvoerig en goed besproken, maar een verdere link met het vervolg van het boek wordt niet gemaakt, terwijl dit in het laatste hoofdstuk bijvoorbeeld uitstekend had gekund.

Het nut van de wiskunde
Ook op een ander gebied lijkt de wiskunde haar buitengewone rol kwijt te raken. Tot de 20e eeuw was de wiskunde vooral iets voor mensen die zich buitengewoon interesseerden voor onopgeloste problemen en die hun genoegen zuiver schepten uit het oplossen ervan. De getaltheoreticus G.H. Hardy zei hierover: *"Ik heb nog nooit iets "nuttigs" gedaan. Geen ontdekking van mij heeft, direct of indirect, ten goede of ten kwade, ook maar het minste verschil gemaakt voor de leefbaarheid van de wereld, en dat zal het waarschijnlijk ook niet doen. Ik heb maar een kans om te ontkomen aan een veroordeling wegens onbeduidendheid en die is dat ik word gezien als de schepper van iets wat de moeite van het scheppen waard was."*[4]
Echter met haar rol in de Tweede Wereldoorlog verloor ook de wiskunde en vooral de getaltheorie, haar onschuld. Voor de eerste maal in de geschiedenis maken ook de getaltheoretici zich "nuttig". Dit betekent wel dat ook een aantal dilemma's waar de andere natuurwetenschappers mee geconfronteerd werden nu ook op de wiskunde van toepassing zijn. Wiskundigen moeten zich nu bijvoorbeeld ook gaan afvragen of het toelaatbaar is hun kennis te gaan gebruiken voor de oorlogsindustrie.

---

[2] op.cit., pagina 173

[3] op.cit., pagina 173

[4] op.cit., pagina 179

De “nuttigheid” van de wiskunde is na de Tweede Wereldoorlog alleen nog maar toegenomen. Wiskundigen kunnen bijvoorbeeld erg nuttig zijn in het beurswezen en bij bedrijven wordt veel gebruik gemaakt van numerieke wiskunde.

De rol van de computer
Een ander wiskundig onderwerp dat nog enige discussie behoeft, is de rol van de computer in de wiskunde. In het laatste hoofdstuk van het boek komen veel wiskundigen aan het woord die het betreuren dat de computer zo’n grote rol is gaan spelen. Veel wiskundigen beweerden bijvoorbeeld bij het oplossen van het vierkleurenprobleem dat de oplossing niet te controleren was. Er zou geen garantie zijn dat er geen defect in het binnenste van de computer of in het programma zelf zou zitten. De controlemogelijkheid die ontstaat door het programma in een andere computer in te voeren was daarom volgens hen niet afdoende. De computer zou werken als een “black box” waar weliswaar antwoorden uitkomen, maar waarvan het controleren van die antwoorden een onmogelijke taak is. De wiskundige Ronald Graham zei hier bijvoorbeeld over:
“Het zou zeer ontmoedigend zijn als je ergens onderweg aan een computer kon vragen of de Riemann-hypothese klopt, en als die zou zeggen: “Ja, die is juist, maar het bewijs zou je niet kunnen begrijpen.”[5]
Ik kan me de frustratie over de controleerbaarheid van het bewijs wel voorstellen, maar ik denk dat dit voorbeeld toch wel sterk overdreven is. Bij het vierkleurenprobleem is het probleem door wiskundigen al van een oneindig aantal kaarten naar een eindig aantal kaarten gebracht. Het enige wat de computer gedaan heeft is het checken van de kaarten. Dat had in principe ook door een persoon gedaan kunnen worden, ware het niet dat deze daar veel te lang mee bezig zou zijn geweest.
Bovendien blijft de vraag in welke mate is een computer minder controleerbaar is. Een “ouderwets” probleem werd ook maar door een beperkt aantal mensen nagekeken die net zo goed als computers fouten kunnen maken. De kans dat een menselijke fout ontdekt wordt is wel groter, maar het blijft een kans. De vraag is of dit nadeel opweegt tegen het grote voordeel dat de computer ons biedt, namelijk dat we problemen kunnen checken die we anders nooit opgelost hadden. In het geval van het vierkleurenprobleem hadden, zonder computer, de onderzoekers gezeten met het probleem dat ze wisten dat het probleem op te lossen was, maar ook dat zij wisten dat ze geen capaciteit hadden om het ook werkelijk te doen.
Naar mijn mening wegen de nadelen van het gebruik van computers niet op tegen de voordelen.

Conclusie

Het boek “Het laatste raadsel van Fermat” is een aanrader voor iedereen die verstand heeft van wiskunde, of juist niet. Het boek geeft niet alleen een zeer beeldende en uitgebreide beschrijving van de geschiedenis van de wiskunde en de mensen die het beoefenen, het houdt zich ook zijdelings bezig met de diepere vragen naar de fundamenten van het vakgebied.
In de afgelopen drie eeuwen is niet alleen een fascinerend raadsel opgelost en veel nieuwe wiskunde geformuleerd, de wiskunde zelf is ook veranderd en is zijn absolute status kwijtgeraakt. “Het laatste raadsel van Fermat”geeft een prachtig overzicht van de ontwikkelingen die deze fascinerende wetenschap in de afgelopen drie eeuwen heeft doorgemaakt.

[5]op.cit., pagina 332