Detectie
Statistiek

Cursus Stralingsveiligheid CD 2022-2023

M.A. Hofstee
mariet.hofstee@maastrichtuniversity.nl

Gebaseerd op werk van Frits Pleiter

Hoofdstuk 11.8 & 9

Statistiek

- precisie en nauwkeurigheid, toevallige en systematische fouten
- kansverdeling en onzekerheid
- Uitrekenen van standaard deviatie en het belang van (veel) goede metingen
  - belangrijk om je onzekerheid goed te kennen
  - kleine onzekerheid is grote kans op juiste beslissing

Uit presentatie ‘statistiek’ van Leon de Prez (VSL, Delft)

Precisie vs. nauwkeurigheid

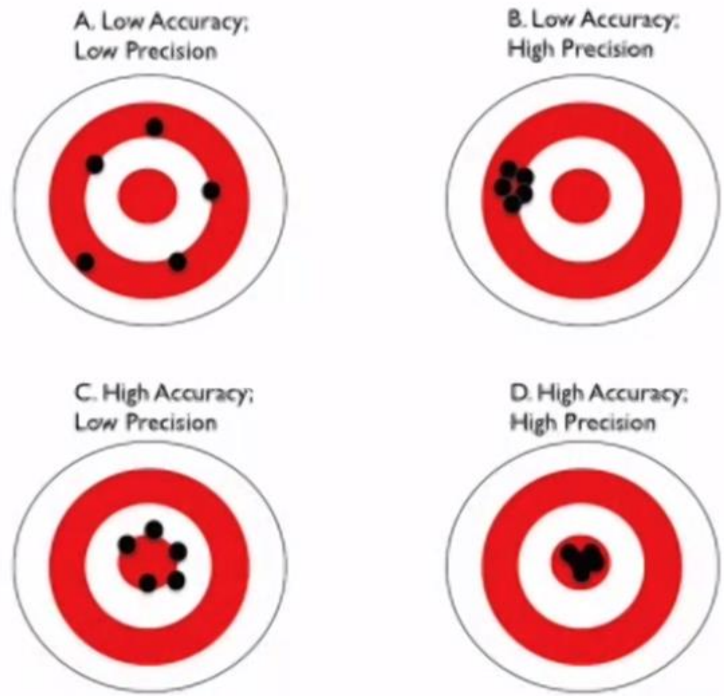
VSL

4. Precisie, nauwkeurigheid

Nederlandse Vereniging voor Stralingshygiëne

PRECISIE
zegt iets over de spreiding van metingen

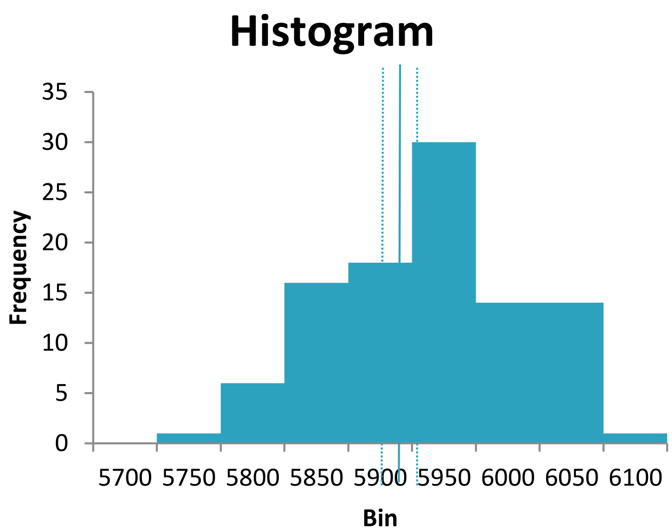
NAUWKEURIGHEID
hoe dicht zitten we bij de verwachtte 'werkelijke' waarde zitten



National
A Solution

Voorbeeld telstatistiek

oefenboek 3.1



Met een detector in een vaste meetopstelling wordt straling van een radioactieve bron gedetecteerd. Er worden 100 metingen (n=100) gedaan van elk precies 1 minuut. De halveringstijd van de bron is erg lang vergeleken met de meettijd. De gevonden meetwaarden x_i zijn weergegeven in het histogram.

Hierbij is $\Sigma\, x_i = 591\,113$
en $\Sigma\, x_i^2 = 3\,494\,679\,543$

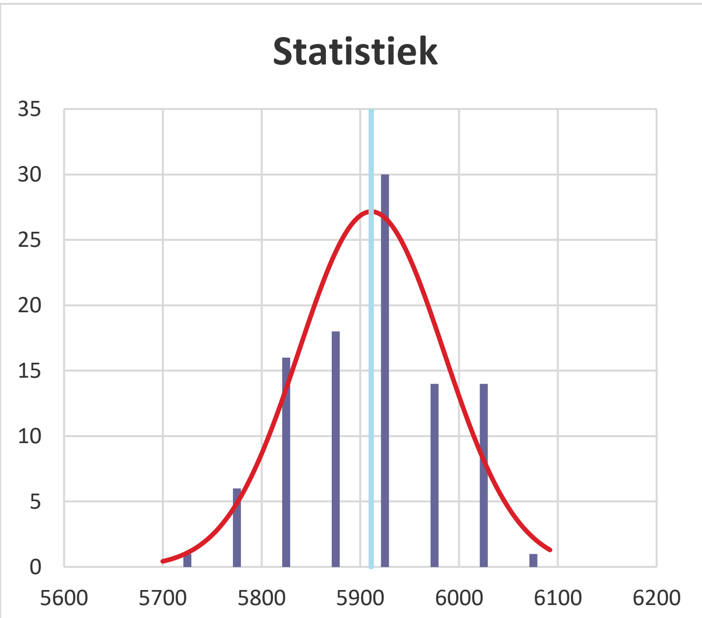
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\bar{x}} \approx \sqrt{x}}$$

$$\sigma_n \approx \sqrt{n}\sigma$$

Voorbeeld

oefenboek 3.1



a maak een histogram met intervallen 5700–5749, 5750–5799, enzovoorts
b bereken het gemiddelde $\bar{x}$ van deze meetwaarden
c bereken de standaarddeviatie σ van het aantal tellingen in 1 minuut
d bepaal uit het histogram het percentage van de metingen die kleiner zijn dan $\bar{x}-\sigma$ en het percentage van de metingen die groter zijn dan $\bar{x}+\sigma$; vergelijk de waarden met wat men verwacht bij een normaalverdeling
e hoeveel procent van de waarnemingen ligt in het interval $[\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma]$? vergelijk deze waarde met wat men verwacht bij een normaalverdeling
f herhaal de vragen d en e voor het interval $[\bar{x}+2\sigma;\ \bar{x}-2\sigma]$
g bereken de standaarddeviatie van het gemiddelde van de meetwaarden
h geef het interval waarin de werkelijke waarde ligt met een waarschijnlijkheid van 95%

Hierbij is $\Sigma\, x_i = 591\ 113$
en $\Sigma\, x_i^2 = 3\ 494\ 679\ 543$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{x} = 5911$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\bar{x}} \approx \sqrt{x}}$$

$$\sigma_n \approx \sqrt{n}\sigma$$

$\sigma = 73.4 \approx \sqrt{5911} = 77$

sdom = 73.4/10

Detectie
indeling

statistiek

- rendement
- lijnbreedte
- telstatistiek en standaarddeviatie
- minimaal detecteerbare activiteit
- optimale verdeling van meettijd

Detectie

tel-statistiek - rendement

$N = \varepsilon \times A \times t$

$\varepsilon = f_{em} \times f_{geo} \times f_{abs} \times f_{det} \times f_{dtijd}$

f_{em} = emissierendement
f_{geo} = geometriefactor
f_{abs} = absorptiefactor
f_{det} = intrinsiek rendement van de detector
f_{dtijd} = correctie voor dode tijd van de detector

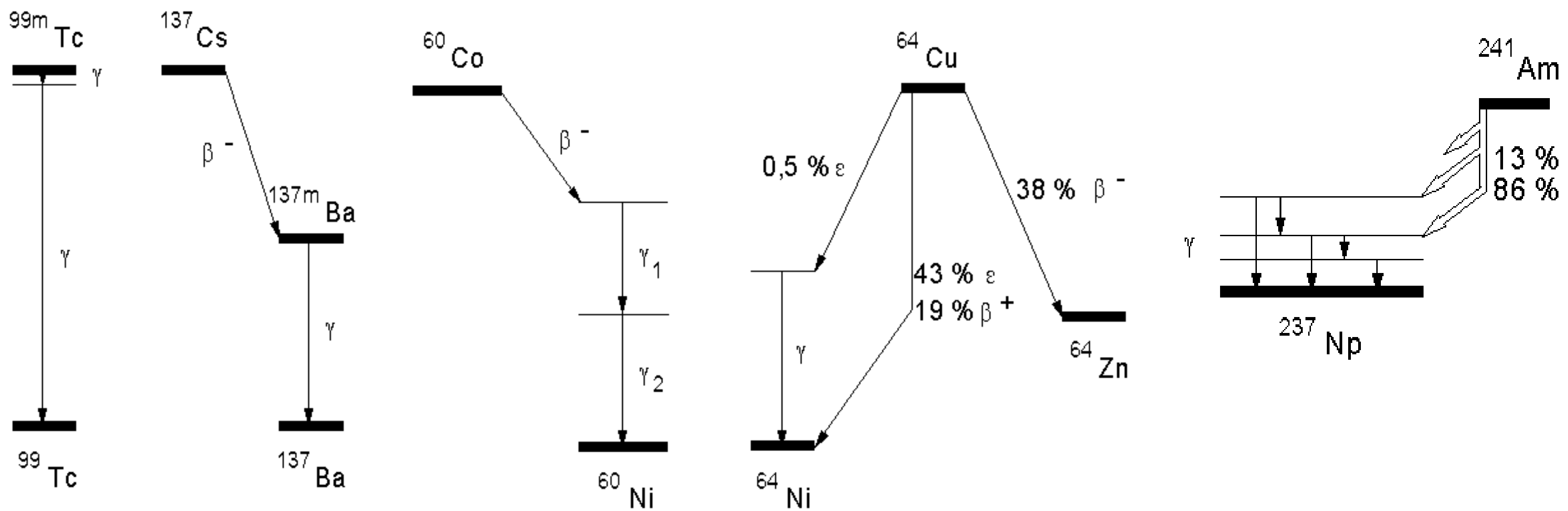
$A = (N / t) / \varepsilon = T / \varepsilon$

$T = N / t$ = teltempo

Detectie

tel-statistiek - emissierendement

emissierendement = aantal uitgezonden deeltjes per verval

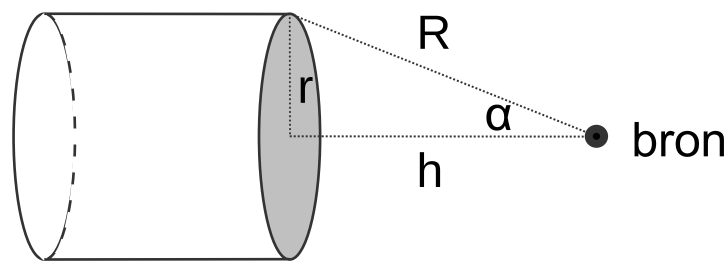


Detectie

tel-statistiek - geometriefactor

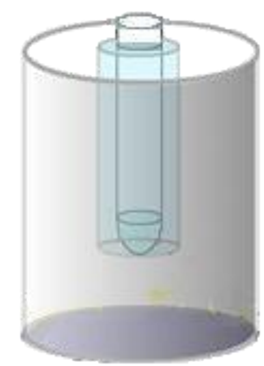
$R^2 = h^2 + r^2$

$$f_{geo} = 0{,}5 \times (1 - \cos\alpha)$$
$$= 0{,}5 \times [\ 1 - (h / R)\ ]$$
$$= 0{,}5 \times [\ 1 - h / \sqrt{(h^2 + r^2)}\ ]$$



als $R \gg r \rightarrow f_{geo} \approx \pi r^2 / 4\pi R^2$

vloeistofscintillatie	$f_{geo} \approx 1$	(4π-geometrie)
putkristal	$f_{geo} \approx 1$	(4π-geometrie)
besmettingsmonitor	$f_{geo} \approx 0{,}5$	(2π-geometrie)



Detectie

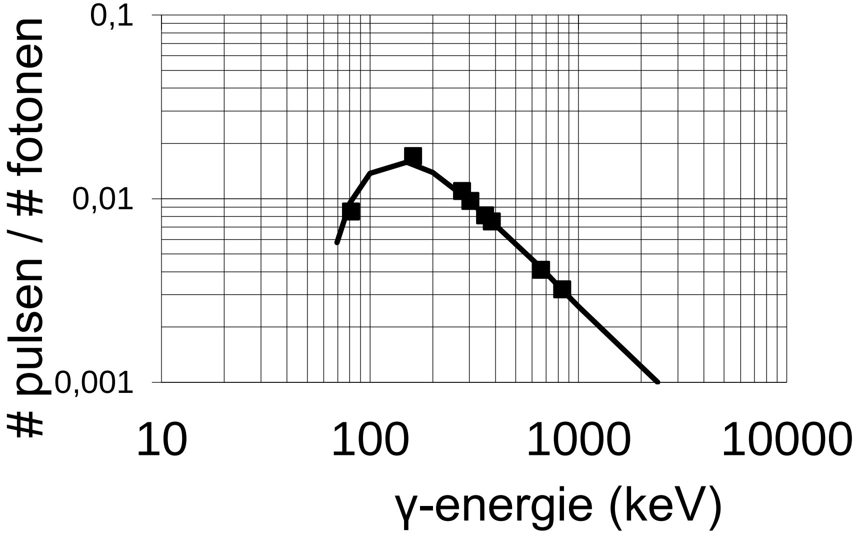
tel-statistiek – intrinsiek rendement detector

gas gevulde detectoren en vloeistofscintilatietellers

geladen deeltjes
f_{det} = 1 voor (α en) β

gammas
$E\gamma > 200$ keV $f_{det} \approx 10^{-3}$

halfgeleider detector hangt af van geometrie, dikte kristal, materiaal etc.

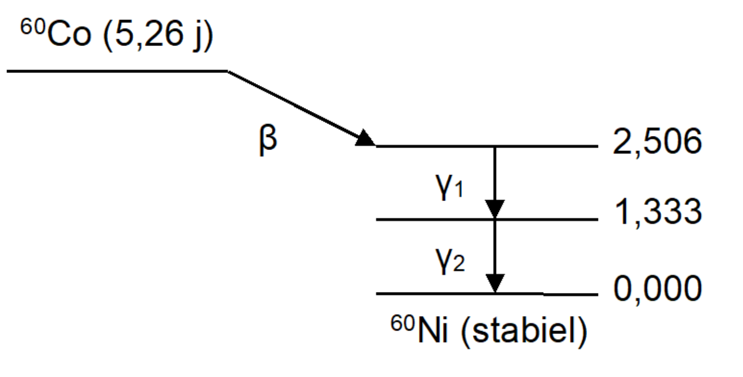


Detectie

tel-statistiek

INTERACTIE (opgave 11.5)

Gegeven is het vervalschema van het nuclide ^{60}Co. Op 65 cm van een puntvormige ^{60}Co-bron is de fotonen flux-dichtheid 1400 $cm^{-2}\ s^{-1}$.



a) bereken de activiteit van deze bron

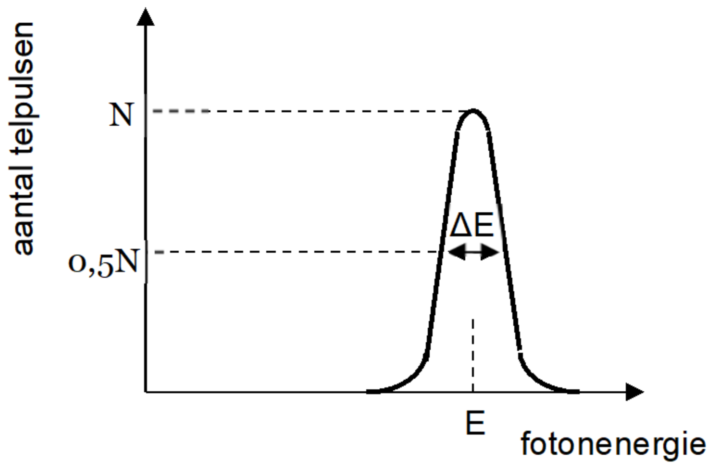
$$\Phi = 2 \times A \,/\, (\text{oppervlak bol met straal 65 cm})$$
$$= 2 \times A \,/\, (4\pi \times 65^2) = 3{,}77\times10^{-5}\, A$$
$$= 1400\ cm^{-2}\ s^{-1}$$
$$A = 1400 \,/\, 3{,}77\times10^{-5} = 3{,}7\times10^{7}\ \text{Bq} = 37\ \text{MBq}$$

Zie ook opgave 11.6-8 in oefenboek

Detectie: Energie oplossend vermogen
lijnbreedte - proportionele telbuis

het energie oplossend vermogen ΔE / E wordt bepaald door
de statistiek in het aantal gevormde elektron-ionparen

ionisatie-energie	34 eV
energie deeltje	E (keV)
aantal ionen/deeltje	$N_I = E / 0{,}034$
standaarddeviatie	$\sigma_{N_I} = \sqrt{N_I}$



energie oplossend vermogen

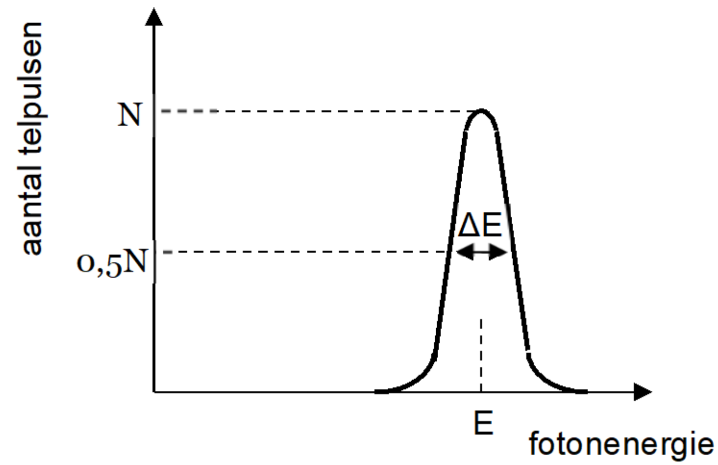
$$\Delta E / E = 2\,\sigma_E/E$$

voorbeeld: ^{55}Fe $E = 5{,}9$ keV $\rightarrow$ $2\Delta E / E = 15\%$

Detectie: Energie oplossend vermogen
lijnbreedte - proportionele telbuis

het energie oplossend vermogen $\Delta E / E$ wordt bepaald door
de statistiek in het aantal gevormde elektron-ionparen

ionisatie-energie	34 eV
energie deeltje	E (keV)
aantal ionen/deeltje	$N_I = E / 0{,}034$
standaarddeviatie	$\sigma_{N_I} = \sqrt{N_I}$



energie oplossend vermogen

$$\Delta E / E = 2\,\sigma_E/E$$

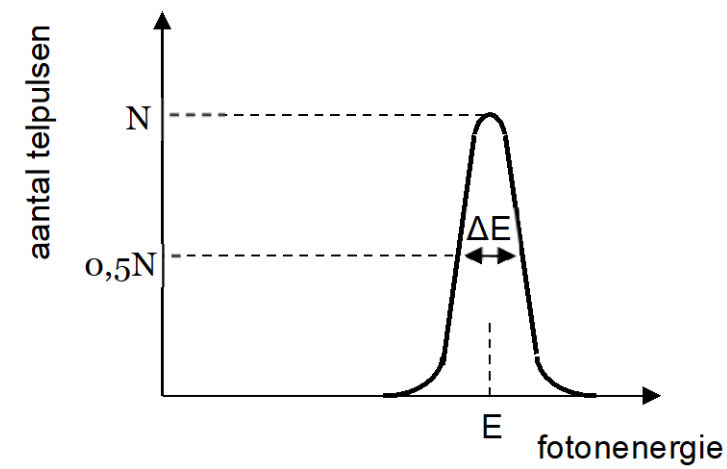
voorbeeld: ^{55}Fe $E = 5{,}9$ keV $\rightarrow$ $2\Delta E / E = 15\%$

Detectie: Energie oplossend vermogen

lijnbreedte - proportionele telbuis

het energie oplossend vermogen ΔE / E wordt bepaald door
de statistiek in het aantal gevormde elektron-ionparen

ionisatie-energie	34 eV
energie deeltje	E (keV)
aantal ionen/deeltje	$N_I = E / 0{,}034$
standaarddeviatie	$\sigma_{N_I} = \sqrt{N_I}$



energie oplossend vermogen

$$\Delta E / E = 2\,\sigma_E/E = \Delta N_I / N_I$$

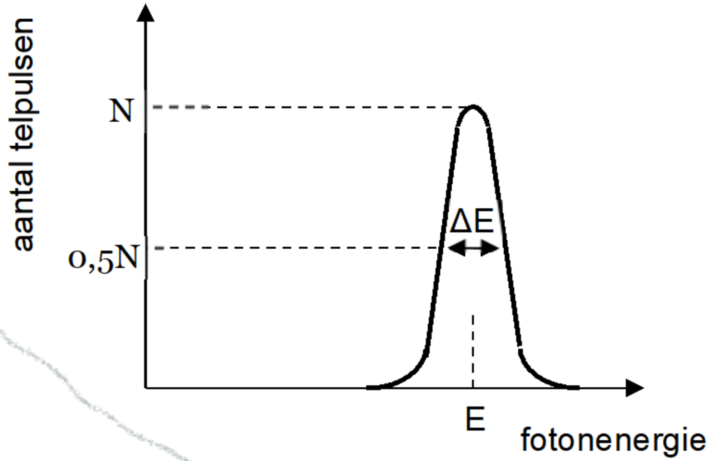
voorbeeld: ^{55}Fe $E = 5{,}9$ keV $\rightarrow$ $2\Delta E / E = 15\%$

Detectie: Energie oplossend vermogen

lijnbreedte - proportionele telbuis

het energie oplossend vermogen $\Delta E / E$ wordt bepaald door
de statistiek in het aantal gevormde elektron-ionparen

ionisatie-energie	34 eV
energie deeltje	E (keV)
aantal ionen/deeltje	$N_I = E / 0{,}034$
standaarddeviatie	$\sigma_{N_I} = \sqrt{N_I}$



energie oplossend vermogen

$$\Delta E / E = 2\,\sigma_E/E = \Delta N_I / N_I = 2\,\sigma_{N_I} / N_I =$$

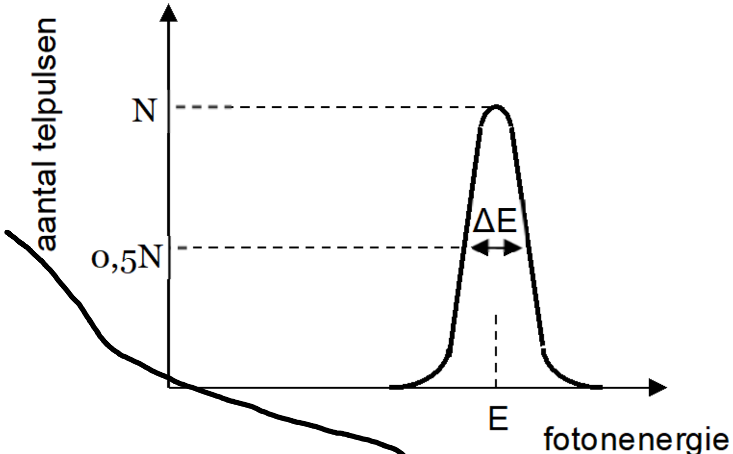
voorbeeld: ^{55}Fe $E = 5{,}9$ keV $\rightarrow$ $2\Delta E / E = 15\%$

Detectie: Energie oplossend vermogen

lijnbreedte - proportionele telbuis

het energie oplossend vermogen ΔE / E wordt bepaald door
de statistiek in het aantal gevormde elektron-ionparen

ionisatie-energie	34 eV
energie deeltje	E (keV)
aantal ionen/deeltje	$N_I = E / 0{,}034$
standaarddeviatie	$\sigma_{N_I} = \sqrt{N_I}$

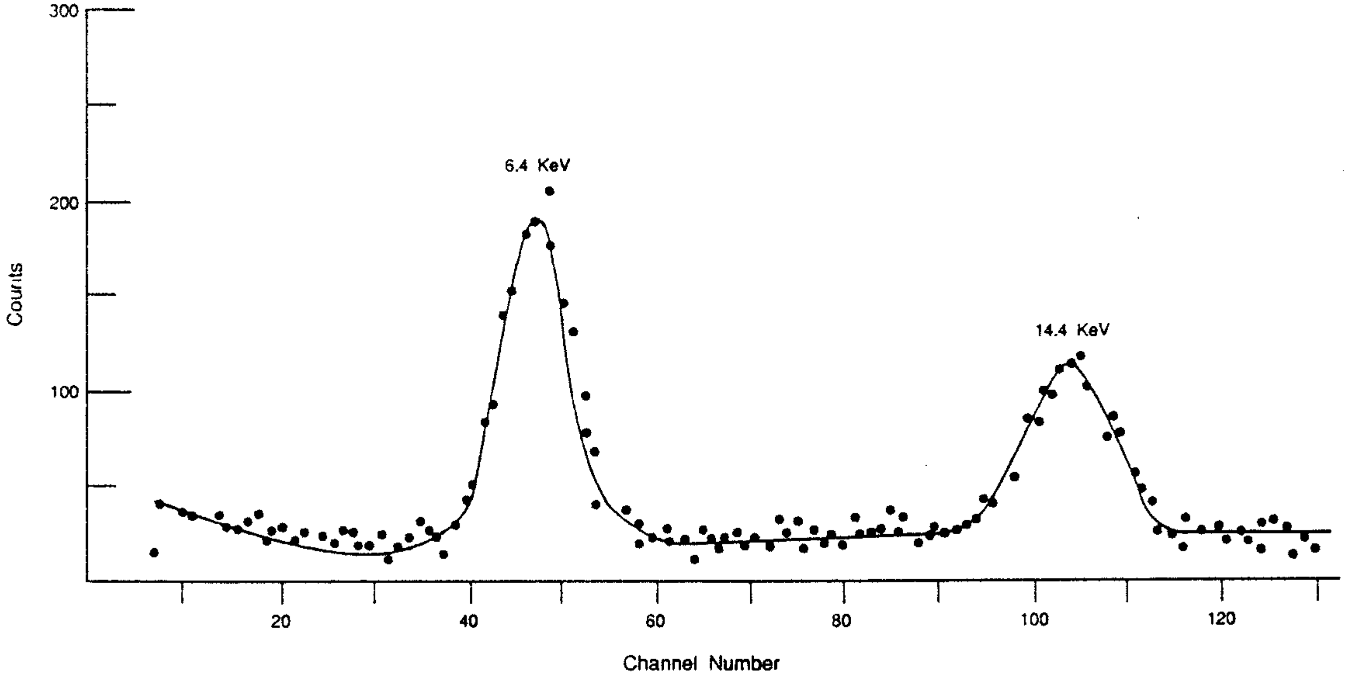


energie oplossend vermogen

$$\Delta E / E = 2\,\sigma_E/E = \Delta N_I / N_I = 2\,\sigma_{N_I} / N_I = 2/\sqrt{N_I} =$$

voorbeeld: ^{55}Fe $E = 5{,}9$ keV → $2\Delta E / E = 15\%$

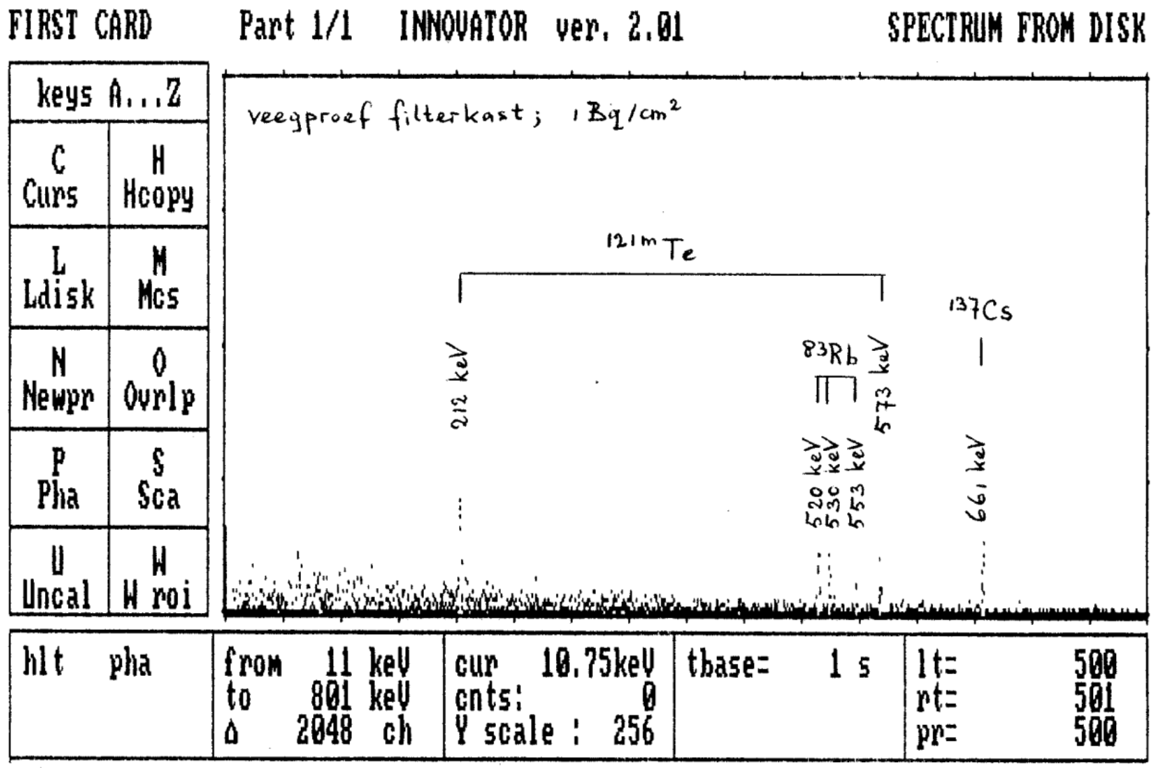
Detectie
lijnbreedte - proportionele telbuis



34 eV per elektron-ionpaar
resolutie bij 6,4 keV is 17%

Detectie

lijnbreedte - Ge-detector

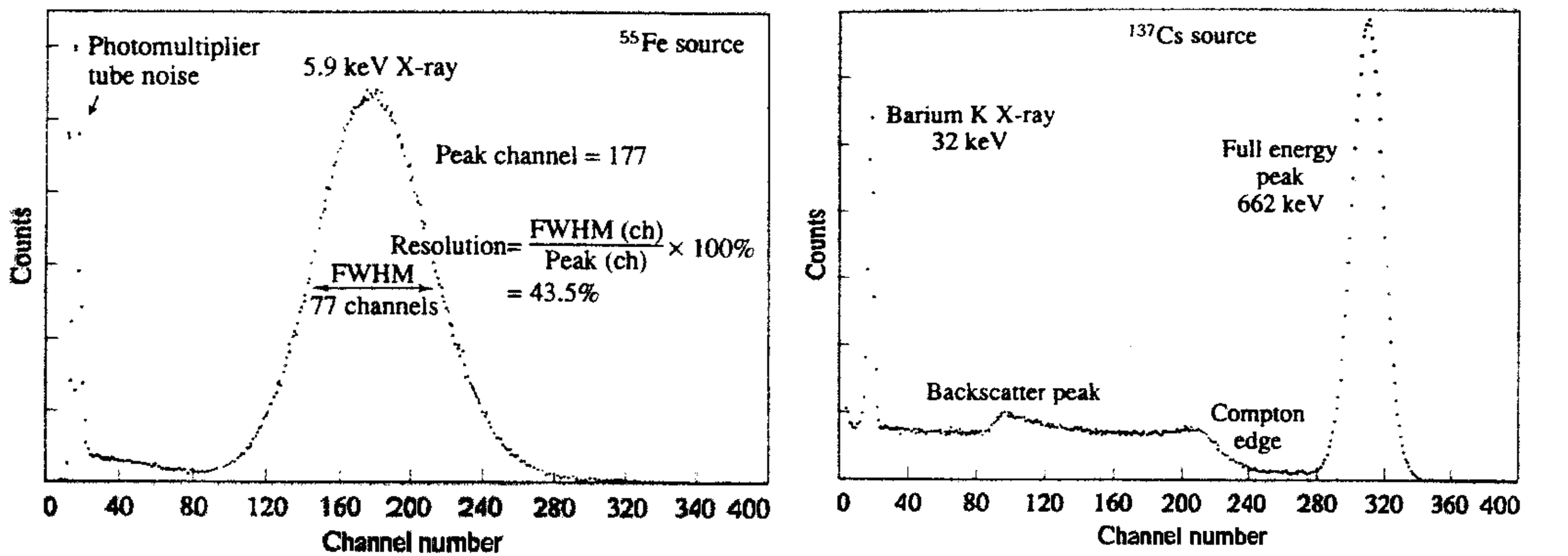


2,9 eV per elektron-gatpaar

resolutie bij 661 keV is 0,4%

Detectie

lijnbreedte - NaI-detector



500 eV per foto-elektron
resolutie bij 5,9 keV is 43,5%
resolutie bij 662 keV is 7%

$$\frac{\Delta \text{Å}}{\text{Å}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{\text{Å}}} \quad (\text{Å in keV})$$

Detectie

tel-statistiek - standaarddeviatie

bruto-aantal telpulsen	N_{bruto} gemeten in tijd t_{bruto}
achtergrondtelpulsen	N_{nul} gemeten in tijd t_{nul}
bruto-teltempo	$T_{bruto} = N_{bruto} / t_{bruto}$
achtergrondteltempo	$T_{nul} = N_{nul} / t_{nul}$
netto-teltempo	$T_{netto} = T_{bruto} - T_{nul}$
standaarddeviatie	$\sigma_N = \sqrt{N}$
	$\sigma_T = (\sqrt{N}) / t = \sqrt{(N / t^2)} = \sqrt{(T / t)}$
	$\sigma_{Tnetto}^2 = \sigma_{Tbruto}^2 + \sigma_{Tnul}^2$
	$= (T_{bruto} / t_{bruto}) + (T_{nul} / t_{nul})$

Detectie

tel-statistiek

bruto-aantal	80 ± 9*	teltijd = 10 s
nuleffect	5000 ± 70*	teltijd = 1000 s

bij statistiek gaat het om wat is of zou kunnen zijn gemeten

omrekenen naar 1000 s

bruto-aantal	8000 ± 900
achtergrond	5000 ± 70
netto-aantal	$3000 \pm \sqrt{(900^2 + 70^2)}$ in 1000 s
	$\boxed{30 \pm \sqrt{(9^2 + 0{,}7^2)}}$ in 10 s

omrekenen naar 10 s

bruto-aantal	80 ± 9
achtergrond	50 ± 0,7
netto-aantal	$\boxed{30 \pm \sqrt{(9^2 + 0{,}7^2)}}$ in 10 s

netto-aantal 30 ± 9 per 10s, de onzekerheid komt van de korte bruto meting

*Hierbij is gebruik gemaakt van $\sigma_N = \sqrt{N}$ voor het afschatten van de onzekerheid

Voorbeeld

oefenboek 3.3

3 Een meting aan een telmonster met een geringe hoeveelheid radioactiviteit levert 244 telpulsen op in 10 minuten. Een meting aan een blanco telmonster levert onder precies dezelfde omstandigheden 184 telpulsen in 10 minuten.

a bereken het bruto-teltempo en de standaarddeviatie hiervan in telpulsen per minuut (tpm); geef de uitkomst in de vorm $T \pm \sigma$ tpm
b herhaal de berekening van vraag a voor de meting van het nuleffect
c herhaal de berekening van vraag a voor de meting van het netto-teltempo
d geef de relatieve fout in het netto-teltempo
e binnen welk interval ligt het werkelijk teltempo met een betrouwbaarheid van 95% ?

Detectie

tel-statistiek

Zie ook Oefenboek 3.8

INTERACTIE

met drie detectoren A, B en C zijn aantallen telpulsen gemeten
welke serie is betrouwbaar en waarom?

detector A	detector B	detector C
100	105	90
100	99	121
100	97	134
100	115	83
100	103	101
100	92	75
100	95	110
100	83	141
100	113	65
100	101	83

Detectie

tel-statistiek

	INTERACTIE detector A	detector B	detector C
	100	105	90
	100	99	121
	100	97	134
	100	115	83
	100	103	101
	100	92	75
	100	95	110
	100	83	141
	100	113	65
	100	101	83
N_{av}	100	100	100
s.d.	0	9	24

Detectie

tel-statistiek - optimale verdeling meettijd (geen afleiding)

totale beschikbare meettijd is t

$t_{nul} = t - t_{bruto}$

$$\sigma_{Tnetto}^2 = (T_{bruto} / t_{bruto}) + (T_{nul} / t_{nul})$$
$$= (T_{bruto} / t_{bruto}) + [\, T_{nul} / (t - t_{bruto})\,]$$

streef naar een minimale fout in netto teltempo

dus afgeleide naar t_{bruto} moet nul zijn

$$d\sigma_{Tnetto}^2/dt_{bruto} = - (T_{bruto} / t_{bruto}^2) + [\, T_{nul} / (t - t_{bruto})^2\,]$$
$$= - (T_{bruto} / t_{bruto}^2) + (T_{nul} / t_{nul}^2)$$
$$= 0$$

voor optimale verdeling meettijd moet

$$t_{nul}^2 / t_{bruto}^2 = T_{nul} / T_{bruto}$$
$$t_{nul} / t_{bruto} = \sqrt{(T_{nul} / T_{bruto})}$$

Om deze optimale verdeling te bepalen is een afschatting van T_{nul} en T_{bruto} nodig!

Detectie

tel-statistiek - minimaal detecteerbare activiteit

minimaal detecteerbare activiteit A_{min} geeft aanleiding tot een significante verhoging van achtergrondteltempo

stel: significante verhoging is $\Delta T = k\sigma_{Tnul}$

stel dat achtergrond is bepaald in teltijd t_{nul}
stel dat actuele meting is uitgevoerd in teltijd $t << t_{nul}$
er zijn nu twee bijdragen tot σ_{Tnul}

1. standaarddeviatie van actuele achtergrond = $\sqrt{(T_{nul} / t)}$
2. standaarddeviatie van gemiddelde achtergrond = $\sqrt{(T_{nul} / t_{nul})}$

significante verhoging is $\Delta T = k\sqrt{(T_{nul} / t + T_{nul} / t_{nul})} \approx k\sqrt{(T_{nul} / t)}$
$\rightarrow$ minimaal detecteerbare activiteit is $A_{min} = \Delta T / \varepsilon$

Detectie

tel-statistiek

INTERACTIE 11.9

Een zeer uitgebreide uniforme oppervlaktebesmetting van 5 Bq cm^{-2} ^{14}C wordt gemeten met een GM-telbuis met een venster van 7 cm^2 en een nuleffect van 20 telpulsen per minuut, en eveneens met een proportionele telbuis met een gevoelig oppervlak van 10 cm $\times$ 10 cm en een nuleffect van 4 telpulsen per seconde. Stel het intrinsieke detectorrendement in beide gevallen op 100%.

a) bereken voor elk van beide monitoren het resulterende netto-teltempo
b) bepaal voor beide besmettingsmonitoren de minimaal detecteerbare oppervlakte besmetting; neem aan dat een significante oppervlaktebesmetting wordt gemeten indien het bruto-teltempo tenminste driemaal het nuleffect bedraagt

Zie ook opgave 11.10 in oefenboek

9 $N = A \times f_{em} \times f_{geo} \times t$

emissierendement $f_{em} = 1$

geometriefactor $f_{geo} = 0{,}5$ (2π-geometrie)

a GM-telbuis

activiteit onder monitor A = oppervlaktebesmetting × (oppervlak detectorvenster)

$= 5\ \text{Bq cm}^{-2} \times 7\ \text{cm}^2 = 35\ \text{Bq}$

tijd $t = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$

teltempo $N = 35\ \text{Bq} \times 1 \times 0{,}5 \times 1\ \text{min} \times 60\ \text{s min}^{-1} = 1050\ \text{tpm}$

proportonele telbuis

activiteit onder monitor A = oppervlaktebesmetting × (oppervlak detectorvenster)

$= 5\ \text{Bq cm}^{-2} \times 100\ \text{cm}^2 = 500\ \text{Bq}$

tijd $t = 1\ \text{s}$

teltempo $N = 500\ \text{Bq} \times 1 \times 0{,}5 = 250\ \text{tps}$

b bruto-teltempo = 3 × nuleffect

dus netto-teltempo = 2 × nuleffect

GM-telbuis

netto-teltempo $2 \times N_{nul} = 2 \times 20 = 40\ \text{tpm}$

$A_{min} = 5\ \text{Bq cm}^{-2} \times (40\ \text{tpm} / 1050\ \text{tpm}) = 0{,}19\ \text{Bq cm}^{-2}$

proportionele telbuis

netto-teltempo $2 \times \mathrm{N}_{nul} = 2 \times 4 = 8\ \text{tps}$

$A_{min} = 5\ \text{Bq cm}^{-2} \times (8\ \text{tps} / 250\ \text{tps}) = 0{,}16\ \text{Bq cm}^{-2}$

Detectie

koffie